Phần 2: CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP

Trong lý thuyết tổ hợp có 4 bài toán cơ bản: đó là bài toán đếm, bài toán liệt kê, bài toán tồn tại và bài toán tổ hợp tối ưu. Trong phạm vi giáo trình này chỉ tập trung nghiên cứu bài toán đếm và vài trường hợp của bài toán tồn tại.

Chương 2. BÀI TOÁN ĐẾM

## 2.1. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

***Dạng tổng quát: Cho một tập rời rạc A; tìm bản số |A| của tập A, tức là hãy đếm xem A có bao nhiêu phần tử.***

Khi đếm các phần tử của A phải đảm bảo 2 nguyên tắc:

Một là: ***Không bỏ sót***. Hai là: ***Không trùng lặp***

Phương pháp tổng quát để giải bài toán đếm có thể diễn giải như sau: Giả sử A là tập cần đếm,  là tập n số nguyên dương đầu tiên. Nếu lập được sự tương ứng đơn trị hai chiều giữa các phần tử của A và các phần tử của N; nghĩa là tìm được một song ánh f

thì

Vì có nhiều cách cho tập A khác nhau nên phương pháp trên chỉ có ý nghĩa định hướng chung. Trong thực tế phải căn cứ vào cách cho cụ thể của tập A mà tìm một giải pháp thích hợp.

Xét một vài ví dụ sau:

*Thí dụ 1.* Cho : x là các số nguyên, dương,  và  chia hết cho 24. Tìm |A|.

*Thí dụ 2.* Cho : x là các con số hàng nghìn mà các chữ số của nó tạo thành một dãy tăng (thí dụ 1348, 2569, …).

Cả hai thí dụ trên đều là tìm các con số thỏa mãn những điều kiện nhất định. Việc đếm như vậy nói chung là không đơn giản.

*Thí dụ 3.* Một người vượt cầu thang có 13 bậc, lúc thì vượt 1 bậc, lúc vượt 2 bậc, lúc vượt 3 bậc một bước. Hỏi có bao nhiêu cách?

*Thí dụ 4.* Có bao nhiêu lần lặp trong đoạn chương trình C++ dưới đây:



Số lần lặp ở đây tương ứng với số phép toán để thực hiện đoạn chương trình nói trên. Mở rộng thí dụ này, vấn đề đặt ra có thể là:

Tìm số phép toán của chương trình thực hiện một thuật toán nào đó; con số này đặc trưng cho độ phức tạp của thuật toán.

*Thí dụ 5.* Một loài khuẩn sinh trưởng theo nguyên tắc: khi đủ a ngày tuổi (a nguyên dương) thì nó bắt đầu sinh sản, mỗi ngày một lứa, mỗi lứa sinh được b khuẩn con (b nguyên dương). Tại thời điểm , số khuẩn là  con đều là mới sinh. Tìm số khuẩn  tại thời điểm  (T nguyên dương) với giả thiết trong khoảng thời gian  không có con chết. A ở đây là tập con khuẩn trong quá trình sinh trưởng của nó.

Qua các thí dụ trên ta thấy tập A có rất nhiều hình thái khác nhau, do đó phương pháp đếm các phần tử của A cũng rất đa dạng

Mỗi phương pháp đếm là ***một thuật toán***. Trước tiên ta tìm hiểu khái niệm cơ bản về thuật toán.

2.2. KHÁI NIỆM THUẬT TOÁN

**2.2.1. Định nghĩa.**

***Thuật toán*** giải một bài toán, có thể hiểu trực quan là một dãy hữu hạn các bước chỉ rõ những thao tác phải thực hiện trên các đối tượng để cuối cùng thu được lời giải của bài toán.Thuật toán có các đặc trưng sau:

*a)Tính hữu hạn*, còn gọi là *tính dừng* của thuật toán.

*b)Tính minh bạch*. Tại mỗi bước các thao tác toán học phải được mô tả 1 cách rõ ràng, có thể thực hiện một cách máy móc không đòi hỏi suy luận. (Bước đầu của Trí tuệ nhân tạo)

*c) Tính đơn trị*. Các kết quả đầu ra – output - của mỗi bước trung gian trong thuật toán được xác định cách đơn trị, chỉ phụ thuộc đầu vào –input - là đầu ra của bước trước.

*d) Tính phổ dụng*. Thuật toán có thể dùng cho bất kỳ bài toán nào trong lớp bài toán đang xem xét.

*e) Tính tối ưu*. Khi xây dựng thuật toán cần bố trí cho số thao tác ít và đơn giản nhất do đó giảm thời gian thực hiện đến mức thấp nhất.

**2.2.2. Biểu diễn thuật toán.\*\*\*** *(Bỏ qua – đã học trong giáo trình khác)*

Có 3 cách biểu diễn thuật toán (lựa chọn tùy trường hợP)

*a)Biểu diễn bằng ngôn ngữ tự nhiên*, Liệt kê các bước của thuật toán.

*Thí dụ.* Giải phương trình bậc 2: với a, b, c là các số thực và 

Bước 1: Đưa vào input a, b, c

Bước 2: Tính biệt số 

Bước 3: Xét dấu 

Nếu  chuyển sang bước 4.

Ngược lại chuyển sang bước 5.

Bước 4: Tính nghiệm



(Output) đưa ra thông báo nghiệm của phương trình là và , chuyển sang bước 6.

Bước 5: (Output) đưa ra thông báo phương trình vô nghiệm, chuyển sang bước 6.

Bước 6: Kết thúc.

*b) Biểu diễn bằng sơ đồ khối*. Sử dụng các biểu trưng hình học quy ước để diễn đạt các bước và thao tác cần thực hiện. Ta quy ước các khối sau:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Nút khởi đầu hoặc kết thúc |
|  | Nút thao tác, ghi câu lệnh cần thực hiện |
|  | Nút điều kiện, ghi rõ điều kiện cần kiểm tra trong quá trình tính toán |
|  | Cung, dùng để chỉ đường đi của thuật toán |

*Thí dụ.* Sơ đồ khối mô tả thuật toán giải phương trình bậc hai:  như sau



*Ưu điểm*: Tính phổ dụng cao, khắc phục được tính đa nghĩa và hàng rào ngôn ngữ, tiện lợi trong ngành toán và tin học.

*c)Biểu diễn bằng ngôn ngữ lập trình*.

Để giải một bài toán bằng máy tính, người ta thường sử dụng một loại ngôn ngữ lập trình nào đó: Đó là một dãy hữu hạn các câu lệnh được viết theo một quy tắc nhất định trên ngôn ngữ lập trình mà ta sử dụng.

*Thí dụ*. Chẳng hạn, thuật toán giải phương trình bậc 2:  với a, b, c là các số thực và  được mô tả bằng một chương trình viết trên ngôn ngữ C++ như sau:

#include <iostream>

#include <cmath>

using namespace std;

int main()

{

double a = 0, b = 0, c = 0;

double delta, x1, x2;

while (a==0)

{

cout<<" Moi nhap he so:"<<endl;

cout<<" a ="; cin>>a;

cout<<" b ="; cin>>b;

cout<<" c ="; cin>>c;

if(a==0) cout<<" Khong hop le. Moi nhap lai";

}

delta = b\*b - (4\*a\*c);

if (delta <0) cout<<" Phuong trinh vo nghiem";

if (delta ==0) cout<<" PT co nghiem kep la: x1 = x2 = "<<-b/(2\*a);

if (delta >0)

{

x1= (-b + sqrt(delta))/(2\*a);

x2= (-b - sqrt(delta))/(2\*a);

cout<<" PT co 2 nghiem phan biet la: x1 = "<<x1<<" va x2 = "<<x2;

}

system("PAUSE");

return 0;

}

**2.2.3. Phương pháp quy nạp toán học.**

***Quy nạp toán học*** là một phương pháp hữu hiệu để chứng minh một mệnh đề toán học đúng với mọi số tự nhiên n. Các bước*:*

*Bước 1:* Kiểm nghiệm để thấy mệnh đề đúng với .

*Bước 2:* Giả sử mệnh đề đã đúng với n, phải chứng minh mệnh đề cũng đúng tiếp với (n+1) – *truy chứng*

*Bước 3:* Kết luận mệnh đề đúng với mọi n.

*Thí dụ 1.* Chứng minh rằng 



Bước 1: Thử với  ta có . Công thức đúng với 

Bước 2: Giả sử công thức trên đúng với n, tức là ta có



Ta phải chứng minh công thức đúng tiếp với , nghĩa là:



Ta có vế trái 

vế phải.

Vậy công thức được chứng minh đúng với mọi n.

*Thí dụ 2.*Tìm tổng 

Ta thấy 



Có thể dự đoán 

Dự đoán này có đúng không. Kiểm tra bằng phương pháp quy nạp:

Bước 1: Với  ta có . Vậy công thức đúng với 

Bước 2: Giả sử công thức trên đúng với n, ta phải chứng minh công thức đúng với  nghĩa là:



Ta có vế trái 

 vế phải.

Bước 3: Dự đoán trên là đúng.

Cần thấy rằng quy nạp toán học không phải là phương pháp duy nhất để giải quyết lớp các bài toán như vậy

**2.2.4. Phương pháp đệ quy.** *( chỉ nói qua)*

***Đệ quy*** là khái niệm thường gặp trong toán học và trong lập trình, nó cho phép ta mô tả ngắn gọn và rõ ràng các đối tượng cũng như các quá trình liên quan đến dãy số tự nhiên.

Đệ quy là một phương pháp xác định các đối tượng thỏa mãn một tính chất nào đó; nó bao gồm các quy tắc, trong đó ***một số quy tắc để xác định các đối tượng ban đầu và quy tắc còn lại dùng để xác định các đối tượng tiếp theo nhờ các đối tượng ban đầu*** đã được xác định.

*Thí dụ.* Cho dãy số ** có tính chất sau:

và .

Đó chính là dãy Fibonacci mà  ta có thể tìm được số Fibonacci thứ n nếu biết số Fibonacci thứ  và thứ .

Bằng quy nạp toán học hoặc bằng cách giải phương trình truy hồi tuyến tính cấp 2 hệ số hằng ta có thể chứng minh rằng  ta có:



Tuy nhiên ta có thể tính  trực tiếp như sau:

Trước hết hãy tìm cặp số  sao cho: 

Suy ra 

Từ điều kiện  ta suy ra  và 

Mà  và  là nghiệm của phương trình ; nên có thể chọn

và

Đặt  thì sẽ có  với  và 

Từ đó suy ra . Vậy ta có  hay 

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |
|  | (2) |
|  | (3) |
| ……………… |  |
|  |  |
|  |  |

Nhân 2 vế của đẳng thức thứ k với  rồi cộng vế với vế ta có:

 (vì )

Ta thấy ;  nên  và ta có:



Điều phải chứng minh.

## 2.3. CÁC PHÉP TOÁN TỔ HỢP KHÔNG LẶP *(Trọng tâm)*

**2.3.1. Chỉnh hợp.**

***Định nghĩa.*** *Chỉnh hợp chập k* của n phần tử là một nhóm gồm k phần tử lấy từ trong n phần tử đã cho và sắp xếp theo một thứ tự nhất định, mỗi phần tử chỉ được lấy một lần (không lặp).

*Thí dụ.* Cho  gồm 6 phần tử.

Các nhóm 123, 213, 402, 305, đều là các chỉnh hợp chập 3 của 6 phần tử. Hai nhóm 123 và 213 có cùng các phần tử, chỉ khác nhau về thứ tự.

Như vậy hai chỉnh hợp là khác nhau nếu chúng có ít nhất một (cặp) phần tử khác nhau hoặc các phần tử có mặt đều giống nhau nhưng thứ tự các phần tử trong 2 chỉnh hợp là khác nhau. Để tạo một chỉnh hợp ta xây dựng dần từ thành phần đầu tiên. Thành phần đầu tiên có n cách chọn, thành phần thứ hai chỉ có  khả năng chọn, …, thành phần thứ k chỉ có  khả năng chọn.

Nếu ký hiệu số chỉnh hợp chập k của n phần tử là  thì ta có:

**** (1)

*Thí dụ.*  Từ các phần tử của X đã cho ở trên, có thể lập được bao nhiêu con số hàng trăm mà các chữ số là khác nhau?

Ta thấy ngay  số.

Ở đây,  chính là số các chỉnh hợp chập 3 có số 0 đứng ở phía trước; con số này không phải con số hàng trăm.

**2.3.2. Hoán vị.**

***Định nghĩa*.** Hoán vị của n phần tử là một cách sắp xếp thứ tự của n phần tử đó. Hoán vị chính là chỉnh hợp chập n của n phần tử.

Ký hiệu số hoán vị là  thì

 (2)

*Thí dụ.* 5 người dàn hàng ngang chụp ảnh, có bao nhiêu kiểu khác nhau?

Mỗi kiểu ảnh là một hoán vị, vậy số kiểu ảnh là: 

**2.3.3. Tổ hợp.**

***Định nghĩa.*** Tổ hợp chập k của n phần tử là một nhóm gồm k phần tử lấy trong n phần tử đã cho (không kể thứ tự). Rõ ràng từ mỗi tổ hợp chập k ta có k! chỉnh hợp chập k khác nhau nên nếu ký hiệu  là số tổ hợp chập k của n phần tử thì dễ dàng thấy rằng:  (3)

*Chú ý rằng vì  là số nguyên nên ta có nhận xét thú vị sau: Tích của k số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho tích của k số tự nhiên đầu (k!).*

*Thí dụ 1.* 10 người thi đấu bóng bàn vòng tròn, có bao nhiêu trận đấu?

Cứ 2 người tạo nên 1 trận đấu, mỗi trận đấu là một tổ hợp chập 2 của 10. Vậy số trận đấu là:

trận

*Thí dụ 2.* Có bao nhiêu dãy nhị phân độ dài 10 có đúng 3 số 1 (7 số 0).

Mỗi dãy nhị phân như thế tương ứng với việc chọn 3 vị trí trong 10 vị trí để gán số 1 tức là tương ứng với một tổ hợp chập 3 của 10 phần tử.

Vậy số dãy nhị phân cần tìm là:



Các số tổ hợp  rất hay gặp trong toán rời rạc, ta thường gọi là *hệ số tổ hợp* hay là *hệ số Newton.* Dưới đây là một số tính chất đáng nhớ:

 (4)

 (5)

 (6)

Tự chứng minh các công thức (4), (5), (6)

Để có thể áp dụng công thức (4) và (5) cho mọi  ta quy ước:

và

*Chú ý:*- Công thức (5) giúp tính toán nhanh hơn. Thay cho tính  ta tính: nếu 

*Thí dụ.*Tính ; ta thấy  nên ta tính



- Công thức (6) với quy ước  cho phép ta tính tất cả các hệ số tổ hợp chỉ bằng phép cộng.

- Các hệ số này được tính và viết theo quy tắc sau: Các dòng tương ứng với ; các cột tương ứng với  và ta có bảng tam giác dưới đây gọi là *tam giác Pascal*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| …. | .... | .... | …. | ….  …. |  |  |

*Tam giác Pascal:*

n\m

1

1. 1
2. 2 1
3. 3 3 1
4. 4 6 4 1

…….

Dòng hệ số tổ hợp cuối cùng: , , , …, ,  là các hệ số trong khai triển nhị thức Newton:



Cho  ta có công thức:

 (7)

Từ hệ thức này ta suy ra một số công thức sau đây:

- Cho  thì sẽ có:

 (8)

- Cho  thì sẽ có:



Từ đó suy ra

 (9)

- Đạo hàm theo x hai vế của (7) rồi thay  sẽ có:

 (10)

## 2.4. CÁC PHÉP TOÁN TỔ HỢP CÓ LẶP

**2.4.1. Chỉnh hợp lặp.**

***Định nghĩa.*** ***Chỉnh hợp lặp chập k*** của n phần tử là một nhóm gồm k phần tử lấy trong n phần tử đã cho và sắp xếp theo một thứ tự nhất định; các phần tử có thể lấy lặp.

*Thí dụ 1.*  Với  các chỉnh hợp lặp chập 3 có thể là 123, 213, 211, 111, …

Nếu ký hiệu  là số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử thì dễ dàng thấy rằng mỗi thành phần của nó đều có n cách lựa chọn nên ta có công thức:  (11)

Chú ý rằng trong chỉnh hợp lặp số k không bị giới hạn bởi điều kiện  mà trái lại k có thể lấy giá trị lớn hơn n. Chẳng hạn như với 3 chữ số 1, 2, 3 ta vẫn có thể lập được các con số hàng triệu gồm 7 chữ số:

1 222 333; 2 221 111; …

*Thí dụ 2.*  Từ các chữ số thuộc  có thể lập được bao nhiêu con số hàng trăm?

Mỗi con số hàng trăm là một chỉnh hợp lặp chập 3 của 6 chữ số đã cho, loại trừ các chỉnh hợp lặp có số 0 đứng trước.

Do đó ta có số các con số hàng trăm là: số

**2.4.2. Hoán vị lặp.**

Ta hãy xét 2 nhóm gồm 5 chữ cái: THANG và NHANH

Nếu ta hoán vị 5 chữ cái trong nhóm THANG thì sẽ được  hoán vị khác nhau. Nhưng khi hoán vị các chữ cái trong nhóm NHANH thì sẽ không được 120 hoán vị khác nhau; vì khi ta đổi vị trí 2 chữ N với nhau hoặc 2 chữ H với nhau thì sẽ không tạo ra một hoán vị mới.

Trong các hoán vị này, chữ N lặp 2 lần, chữ H lặp 2 lần, ta gọi đó là các hoán vị lặp. Số hoán vị lặp dễ dàng tính được bằng cách loại bớt các hoán vị do có phần tử lặp:



Xét trường hợp tổng quát: Cho k phần tử khác nhau; ta ký hiệu  là số hoán vị của k phần tử trên, trong đó phần tử thứ nhất lặp  lần, phần tử thứ hai lặp  lần, …, phần tử thứ k lặp  lần.

Dễ dàng chứng minh được công thức sau đây:

 (12)

*Thí dụ.*Hoán vị các chữ cái trong tên của dòng sông MISSISIPI, ta thấy ở đây chỉ có 4 chữ cái M, P, S, I trong đó M và P không lặp, S lặp 3 lần, I lặp 4 lần. Vậy số hoán vị là:



Nếu ta đặt  thì sẽ có định lý sau đây:

***Định lý 1.* Ký hiệu  là số cách chia n phần tử khác nhau thành k nhóm với số các phần tử tương ứng là .**

Nếu  thì

.

* *Thực chất, có thể xem mỗi cách chia n phần tử làm k nhóm mỗi nhóm có n1, n2, …, nk phần tử là một hoán vị lặp chập n1, n2, …, nk phần tử của k phần tử đã cho nên ta có kết quả trên. (Có thể tham khảo cách CM sau đây)*

*Chứng minh.* Không mất tính tổng quát ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp . Thật vậy, ta có  là số cách chọn  phần tử trong n phần tử. Tương ứng với mỗi cách chọn  phần tử cho nhóm thứ nhất, ta còn lại  phần tử; do đó có  cách chọn  phần tử cho nhóm thứ hai. Đương nhiên sau khi chọn  phần tử cho nhóm thứ hai thì sẽ còn lại  phần tử của nhóm thứ ba. Vậy số cách chia ấy là:



Với chú ý rằng  thì ta có:



*Thí dụ 1.*Có bao nhiêu cách chia bộ bài tú lơ khơ 52 quân thành 4 phần tương ứng với số quân là 10, 12, 14, 16.

Vì số quân của các phần khác nhau nên



Giả thiết  là để cho các nhóm được tạo thành không có sự trùng lặp. Nếu  tức là có i nhóm có số phần tử bằng nhau thì công thức tính sẽ là:



Nghĩa là số cách chia nhóm sẽ giảm đi i! lần.

*Thí dụ 2.* Chia 4 đối tượng a, b, c, d thành 2 nhóm, mỗi nhóm gồm 2 đối tượng thì chỉ có 3 cách

(a, b) và (c, d)

(a, c) và (b, d)

(a, d) và (b, c)

Chú ý rằng nếu lấy ra 2 đối tượng từ 4 đối tượng thì có  cách, nhưng chia thành 2 nhóm, mỗi nhóm 2 đối tượng thì lại chỉ có:

 cách như trên.

*Thí dụ 3.* Có bao nhiêu cách chia bộ bài tu lơ khơ 52 quân thành 4 phần bằng nhau?

* Khi đó mỗi phần có 13 quân nên:



**2.4.3. Tổ hợp lặp.**

***Định nghĩa.***Tổ hợp lặp chập k của n phần tử là một nhóm gồm k phần tử lấy (có thể lặp) trong n phần tử đã cho. Giống như trong chỉnh hợp lặp, số k có thể lớn hơn n.

*Thí dụ 1:*  Có 5 cái kẹo, chia co 3 em bé A, B, C một cách tùy tiện, em nào được bao nhiêu cái cũng được. Hỏi có bao nhiêu cách chia?

Ta xem như 5 chiếc kẹo là 5 ô, chia các chữ chia vào 3 ô đó, mỗi ô có thể lặp nhiều lần (được nhiều kẹo).

Có thể có các cách chia:

A B C A B C A B C A B C A B C A B C

0 0 5 1 0 4 2 0 3 3 0 2 4 0 1 5 0 0

0 5 0 1 4 0 2 3 0 3 2 0 4 1 0

0 1 4 1 1 3 2 1 2 3 1 1

0 4 1 1 3 1 2 2 1

0 2 3 1 2 2

0 3 2

Tất cả có và chỉ có: 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 cách chia.

Nếu hạn chế thêm yêu cầu: Sao cho em bé nào cũng có ít nhất 1 kẹo thì số cách chia chỉ còn : 6 cách.

* *Ký hiệu số tổ hợp chập k có lặp của n phần tử là* ****** *.*

*Chứng minh. (Ta gán cho mỗi phần tử trong n phần tử đã cho một số nguyên dương khác nhau từ 1 đến n. Khi đó mỗi tổ hợp chập k không lặp của n phần tử tương ứng với 1 dãy số tăng  trong đó: *

*Và mỗi tổ hợp lặp chập k của n phần tử tương ứng với 1 dãy số không giảm  trong đó  và không nhất thiết .*

*Ta thiết lập sự tương ứng giữa dãy  với dãy  như sau:*

**

**

**

*…………..*

**

*Khi đó ta có *

*Mỗi dãy  như vậy ứng với một tổ hợp (không lặp) chập k của () phần tử.*

*Vậy *

*Ngược lại với mỗi tổ hợp không lặp chập k của () phần tử (tương ứng với 1 dãy tăng ) ta có thể tìm được một tổ hợp lặp chập k của n phần tử (tương ứng với dãy không giảm ), nghĩa là:≥*

**

*Từ đó suy ra * )

Chúng ta công nhận công thức tính: * (\*\*)*

Trong thí dụ 1 ta có số cách chia là :

R35 = C5+3-1 5 = C75 = 7!/2! 5! = (6x7) / 2 = 21

* *Bài toán ở thí dụ 1 tương đương với bài toán:*

*Tìm các nghiệm số nguyên không âm : x1, x2, x3 của phương trình:*

x1 + x2 + x3 = 5 với mọi xi nguyên ≥ 0

*Nếu cho thêm điều kiện: mỗi bé ít nhất đều có kẹo tức là xi > 0 thì cách giải sẽ thế nào?*

*Thí dụ 2.* Có bao nhiêu cách chia 10 chiếc kẹo cho 5 em bé?

Mỗi cách là một tổ hợp lặp chập 10 của 5 phần tử, vậy số cách chia là:

 cách.

*Thí dụ 3.* Phương trình 

 và nguyên () có bao nhiêu nghiệm?

Một hệ nghiệm là một cách chia 8 số 1 cho 4 biến x1, x2, x3, x4 cho nên mỗi hệ nghiệm là một tổ hợp lặp chập 8 của 4 phần tử, vậy số nghiệm là:

 nghiệm.

## 2.5. CÁC NGUYÊN LÝ ĐẾM

Mỗi bài toán đếm có một cấu trúc khác nhau nên chúng ta cần phải lựa chọn phương pháp đếm phù hợp với cấu trúc của bài toán đó. Một số phương pháp đếm có tính chất tổng quát cho một lớp bài toán, ta gọi nó là ***nguyên lý đếm***. Dưới đây là các nguyên lý quan trọng.

**2.5.1. Nguyên lý cộng.** Nếu  là một phân hoạch của A:

và thì

 (14)

*Thí dụ 1.*là tập lũy thừa của X. Tìm |A|.

Ta biết rằng P(X) là tập mọi tập con có thể có của X kể cả tập rỗng  và bản thân tập X. Ta ký hiệu  là tập mọi tập con gồm k phần tử của X; . Trong đó  là tập rỗng. Ta thấy

và

Áp dụng nguyên lý cộng thì sẽ có:



Vì  nên ta có 

*Thí dụ 2.*Giá trị của S là bao nhiêu sau khi đoạn chương trình C++ dưới đây được thực hiện?

int

for ()

S + +;

for ()

S + +;

for ()

S + +;

Ta thấy rằng đầu tiên giá trị của S được gán bằng 0 và có 3 vòng lặp for độc lập. Sau mỗi lần lặp của mỗi vòng giá trị của S tăng lên 1 đơn vị. Vòng for thứ nhất lặp 5 lần, vòng for thứ hai lặp 10 lần, vòng for thứ ba lặp 15 lần. Vậy sau 3 lần lặp giá trị của S sẽ là: .

**2.5.2. Nguyên lý nhân.**

Nếu A là tích Descarte:  thì

 (15)

Trường hợp đặc biệt:  thì 

*Thí dụ 1.*Mỗi biển số ô tô được ghi bởi 1 bộ gồm 2 chữ cái có thể lặp trong 26 chữ cái tiếng Anh và một bộ 4 chữ số có thể lặp. Hỏi có bao nhiêu biển số khác nhau?

Ký hiệu  là tập các bộ 2 chữ cái có thể lặp trong 26 chữ cái, ta có



Ký hiệu  là tập các bộ 4 chữ số có thể lặp thì 

Ký hiệu E là tập các biển số ô tô thì . Do đó



*Thí dụ 2.*Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 10?

Ký hiệu ; A là tập các xâu nhị phân có độ dài 10 thì .

Vậy .

*Thí dụ 3.*Giá trị của S sẽ là bao nhiêu sau khi đoạn chương trình C++ dưới đây được thực hiện?

Int 

for ()

for ()

for ()

S + +;

Đầu tiên giá trị của S được gán bằng 0 và vòng lặp for lồng nhau. Sau mỗi lần lặp của vòng for, giá trị của S tăng lên 1 đơn vị. Vòng for thứ nhất lặp 5 lần, vòng for thứ hai lặp 10 lần, vòng for thứ ba lặp 15 lần.

Vậy sau 3 lần vòng lặp for lồng nhau, giá trị của S sẽ là: .

**2.5.3. Nguyên lý loại trừ.**

Nếu  thì  (16)

Ta gọi đó là ***nguyên lý loại trừ***

*Thí dụ.*

Có 8 nam và 10 nữ; có bao nhiêu cách chọn ra 6 người có cả nam và nữ?

- Nếu muốn áp dụng nguyên lý cộng ta làm như sau:

Ký hiệu  là tập các nhóm 6 người có cả nam và nữ; trong đó có i nam () thì ta có:

và

Vậy 

Nhưng khi tính  ta phải áp dụng nguyên lý nhân.



Vậy 

- Nếu áp dụng nguyên lý loại trừ ta làm như sau:

Tổng số nam và nữ là: ; có thể tạo ra  các nhóm gồm 6 người. Nếu loại bỏ số các nhóm chỉ có nam hoặc chỉ có nữ thì sẽ được số các nhóm có cả nam và nữ.

Số nhóm chỉ có nam là 

Số nhóm chỉ có nữ là 

Vậy số nhóm cần tìm là: 

**2.5.4. Nguyên lý bù trừ.**

Nguyên lý bù trừ giải quyết bài toán đếm số phần tử của một phủ của A, nghĩa là:  mà không có điều kiện  nên không thể áp dụng nguyên lý cộng.

Dễ dàng thấy rằng với thì .

Ta dễ dàng chứng minh được 

Các phần tử  được đếm 2 lần, một lần tính trong  và một lần tính trong , vậy phải trừ đi 1 lần.

- Với thì ; công thức đếm sẽ là:



Ý nghĩa của công thức này là: Các phần tử thuộc giao của 2 tập được đếm 2 lần phải trừ đi một lần. Các phần tử  được tính 3 lần trong và bị trừ đi 3 lần trong giao của các 2 tập ; như vậy coi như chưa được đếm. Vậy phải bù vào 

Trường hợp tổng quát: Nếu  thì

 (17)

Trong đó 





……………………



Công thức (17) được gọi ***là nguyên lý bù trừ.***

***Thí dụ 1.***Trong một lớp học, mỗi sinh viên đều biết ít nhất một ngoại ngữ. Có 30 sinh viên biết tiếng Anh, 31 sinh viên biết tiếng Pháp, 32 sinh viên biết tiếng Nga, 15 sinh viên biết tiếng Anh và Pháp, 16 sinh viên biết tiếng Pháp và Nga, 17 sinh viên biết tiếng Nga và Anh, 5 sinh viên biết cả 3 ngoại ngữ. Hỏi cả lớp có bao nhiêu sinh viên?

Gọi N là tổng số sinh viên còn N1, N2, N3 lần lượt là số sinh viên biết 1, 2, 3 ngoại ngữ, theo nguyên lý bù trừ ta có: 

Nên sinh viên.

*Thí dụ 2.*Có bao nhiêu số nguyên dương,  chia hết cho 2, 3 hoặc 5.

Ký hiệu  là tập các số tương ứng chia hết cho 2, 3, 5 và .

Theo nguyên lý bù trừ: 

Trong đó 





Ta có:  trong đó [x] là phần nguyên của x.



;

;

; 



Vậy .

*Thí dụ 3.***Tìm số mất thứ tự.**

Bỏ n bức thư vào n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Tìm xác suất để không một bức thư nào đúng địa chỉ.

Số cách bỏ thư là n!, số cách bỏ thư không bức thư nào đúng địa chỉ là  thì xác suất cần tìm là: 

***là số mất thứ tự***. được tính theo nguyên lý bù trừ



Trong đó 

là số cách bỏ thư có ít nhất k lá thư đúng địa chỉ.

Dễ dàng thấy rằng . Trong đó  là số cách chọn k bức thư để bỏ đúng địa chỉ, còn  bức thư còn lại ta bỏ một cách tùy ý, nghĩa là có  cách. Trong  cách bỏ thư này vẫn có những thư đúng địa chỉ nên  là số cách bỏ thư để có ít nhất k thư đúng địa chỉ.

Thay vào đó ta có:

 (18)

Vậy xác suất là: 

Điều lý thú là khi cho  thì 

Số mất thứ tự  tăng rất nhanh. Sau đây là một vài giá trị của 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  | 0 | 1 | 2 | 9 | 44 | 265 | 1854 | 14833 | 133496 | 1334961 |

*Thí dụ 4.*Bài toán xếp chỗ của Lucas.

Có bao nhiêu cách xếp chỗ cho n cặp vợ chồng vào 2n chiếc ghế quanh bàn tròn sao cho nam nữ xen kẽ nhau và không có cặp vợ chồng nào ngồi cạnh nhau?

- Trước tiên xếp chỗ cho các ông chồng: có (2n)! cách xếp.

Ký hiệu  là số cách xếp cần tìm và  là số cách xếp chỗ cho các bà vợ tương ứng với một cách xếp chỗ cho các ông chồng thì 

- Vấn đề còn lại là tìm :

Đánh số các ông chồng (đã xếp chỗ) từ 1 đến n, và các bà vợ (chưa được xếp chỗ) cũng được đánh số như các ông chồng: nghĩa là bà i là vợ ông i; sau đó đánh số các ghế còn trống theo nguyên tắc ghế số i ở giữa ông i và ông  và được thực hiện theo nguyên tắc vòng tròn, nghĩa là . Mỗi cách xếp chỗ cho các bà được biểu diễn bằng một phép thế f trên tập {1, 2, …, n} với quy ước  nghĩa là ghế i được xếp cho bà j. Phép thế này phải thỏa mãn điều kiện

và (\*)

Như vậy  là tổng số tất cả các phép thế thỏa mãn điều kiện (\*), ta gọi là một phân bố.

Xét tập mọi phép thế f của {1, 2, …, n}. Trên tập này gọi  là tính chất  và  là tính chất . Đặt  thì theo nguyên lý bù trừ ta có:



Trong đó  là tổng số tất cả các phép thế thỏa mãn k tính chất lấy từ (2n) tính chất đang xét.

Vì không thể xảy ra đồng thời thỏa mãn  và  hoặc  và  nên trong các cách lấy ra k tính chất từ (2n) tính chất đang xét, cần thêm điều kiện: các  và  hoặc  và  không được đồng thời có mặt. Gọi số cách này là g(2n, k) với .

Với mỗi cách lấy ra k tính chất như vậy ta có  phép thế thỏa mãn chúng nên .

Do đó ta có:



Bây giờ còn phải tính . Muốn vậy ta xếp 2n tính chất đang xét trên một vòng tròn theo thứ tự  và thấy rằng g(2n, k) chính là số cách lấy ra k phần tử trong 2n phần tử trên đường tròn sao cho không có 2 phần tử nào kề nhau được lấy ra. Để tính g(2n, k) ta giải hai bài toán con sau đây:

Bài toán 1.Có bao nhiêu cách lấy ra k phần tử trong dãy n phần tử sao cho không có 2 phần tử kề nhau cùng được lấy ra?

*Giải.*Khi lấy ra k phần tử sẽ còn lại  phần tử, tạo ra  khoảng (kể cả 2 đầu). Mỗi cách lấy ra k khoảng cách từ các khoảng này sẽ tương ứng với một cách chọn k phần tử thỏa mãn điều kiện đã nêu, vậy số cách cần tìm là: 

Bài toán 2.Nội dung giống như bài toán 1 nhưng với n phần tử xếp trên đường tròn.

*Giải.*Cố định phần tử a trong n phần tử. Phân các cách lấy thành 2 lớp:

Lớp 1: Gồm các cách a được chọn, do đó 2 phần tử kề a không được chọn, nên ta phải lấy  phần tử từ  phần tử; các phần tử này xem như 1 dãy, do đó theo bài toán 1, số cách chọn thuộc lớp này 

Lớp 2: Phần tử a không được chọn, loại a đi, bài toán đưa về trường hợp lấy k phần tử từ  phần tử trên 1 dãy. Số cách thuộc lớp này là 

Theo nguyên lý cộng ta có:



Từ kết quả của bài toán 2, ta suy ra:



Vậy ta có:



Dưới đây là một vài trị số của :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  | 0 | 1 | 2 | 13 | 80 | 579 | 4738 | 43387 | 439792 |

*Thí dụ.*

Nếu có 4 cặp vợ chồng thì  cách.

Với 5 cặp vợ chồng thì  cách.

**2.5.5. Nguyên lý quy về đơn giản.**

Một trong các phương pháp đếm là quy một bài toán phức tạp thành các bài toán đơn giản hơn. Điều này không phải lúc nào cũng dễ dàng vì nó thường đòi hỏi những hiểu biết sâu sắc và sự phân tích khéo léo các cấu hình phức tạp cần đếm. Nguyên lý này có ý nghĩa như một định hướng tổng quát, còn cách thức cụ thể lại phụ thuộc vào cấu trúc của từng bài toán. Bài toán xếp chỗ của Lucas là một thí dụ điển hình về cách quy một bài toán phức tạp thành các bài toán đơn giản hơn.

Dưới đây xét một thí dụ khác để thấy tính đa dạng của nguyên lý này:

“Một người vượt cầu thang có 9 bậc theo cách lúc thì bước 1 bậc, lúc thì bước 2 bậc, lúc thì bước 3 bậc một bước. Hỏi có bao nhiêu cách vượt 9 bậc cầu thang như thế? ”

Giai đoạn 1.

Ta phân biệt các cách khác nhau theo số lượng mỗi bước của cách vượt cầu thang. Ký hiệu  là số bước tương ứng với 1 bậc, 2 bậc, 3 bậc thì ta có: và nguyên 

Ở giai đoạn này mỗi nghiệm của phương trình trên  được coi như là một cách vượt cầu thang. Vậy ta có các cách sau đây:













Giai đoạn 2: Ký hiệu  là số cách vượt cầu thang tương ứng với . Ta tính các f().

Dễ dàng thấy . Để tính  ta thấy  nghĩa là có 4 bước: một bước 1 bậc, một bước 2 bậc và hai bước ba bậc.

Trong bốn bước này ta chọn một bước nào đó cho 1 bậc, có  cách. Sau khi chọn bước này, còn lại 3 bước, ta chọn một bước cho 3 bậc: đó là  cách. Vậy  cách. Theo cách đó ta có:













Vậy số cách vượt cầu thang là:

cách.

**2.5.6. Nguyên lý truy hồi.**

Khi tính số các cấu hình tổ hợp được tạo lập từ n phần tử, thì số cấu hình tổ hợp này phụ thuộc vào n; ta ký hiệu là . Trong nhiều trường hợp rất khó tìm trực tiếp công thức của , nhưng nhiều khi lại có thể tìm được mối liên hệ giữa  và  hoặc với . Nhờ công thức này cùng với các giá trị ban đầu  mà ta dễ dàng tìm được  với bất kỳ giá trị nào của n. Công thức đó gọi là công thức truy hồi.

Do tính kế thừa, công thức truy hồi rất có tác dụng trong việc lập chương trình cho máy tính, đơn giản hóa đáng kể quá trình tính toán.

Nếu công thức truy hồi có dạng  (hoặc ) thì ta gọi đó là phương trình truy hồi cấp 1 (hoặc cấp 2). Nếu biết  (hoặc và ) thì ta có thể tính được  với bất kỳ giá trị nào của n . Cách tìm phương trình truy hồi, tùy theo bài toán thường rất khác nhau.

Dưới đây ta xét một số thí dụ điển hình:

*Thí dụ 1.*

Cho n đường thẳng có vị trí tổng quát trong mặt phẳng, nghĩa là không có 2 đường thẳng nào song song và cũng không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tìm số phần mặt phẳng  tạo thành từ n đường thẳng đó.

Ta vẽ  đường thẳng có vị trí tổng quát, số phần mặt phẳng là . Vẽ thêm đường thẳng thứ n, cắt  đường thẳng đã cho tại  giao điểm khác nhau; các giao điểm này chia đường thẳng vẽ thêm thành n phần.



Mỗi phần đường thẳng nằm trong 1 phần mặt phẳng tạo nên bởi  đường thẳng ban đầu và chia đôi phần mặt phẳng đó, nghĩa là tạo thêm n phần mặt phẳng nữa.

Vậy ta có: 

Ta biết rằng  nên







Cuối cùng: 

*Thí dụ 2.*  Bài toán đàn thỏ của Fibonacci (nhà toán học Ý 1170-1226).

Thả một cặp thỏ mới sinh (1 con đực, 1 con cái) lên một đảo hoang. Giả sử khi được 2 tháng tuổi, chúng bắt đầu sinh sản, mỗi tháng một lứa, mỗi lứa sinh ra 1 cặp thỏ con. Các cặp thỏ con cũng sinh trưởng và sinh sản theo quy tắc trên. Tìm số cặp thỏ trên đảo sau n tháng, biết rằng trong thời gian nghiên cứu không có cặp con nào chết bệnh hoặc bị bắt.

*Giải:*

Ký hiệu  là số cặp thỏ có ở tháng thứ n; số cặp thỏ này bằng số cặp thỏ có ở tháng thứ  là  cộng với số cặp thỏ mới sinh ra là .

Vậy ta có: 

Theo điều kiện ban đầu ta có:





Suy ra:







Tiếp tục như vậy ta có dãy số: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … gọi là dãy số Fibonacci, dãy số đặc trưng cho một quá trình “sinh mà không tử”; một quá trình chỉ có tính “giả tưởng”

Nhưng nếu coi một sinh vật có đời sống “đủ dài” (ngoài tầm nghiên cứu của ) là “bất tử” thì dãy số Fibonacci lại liên quan đến nhiều vấn đề lý thú không chỉ trong toán học mà trong cả sinh học, kiến trúc, nghệ thuật và cũng đã từng là chìa khóa giải mã cho những vấn đề huyền bí trong những câu chuyện rất hấp dẫn.

Quy luật của dãy số Fibonacci là một số hạng bất kỳ bằng tổng của hai số hạng đứng liền trước nó.

Để tìm công thức của theo n thì ta phải giải phương trình truy hồi



*Phương trình *(\*)

*(p, q là hằng số) được gọi là phương trình truy hồi tuyến tính cấp 2 hệ số hằng. Ta chỉ xét trường hợp vế phải bằng 0 và gọi đó là phương trình thuần nhất.* Dễ dàng chứng minh được rằng:

c là hằng số



Ta có định lý sau:

***Định lý 2.***Nếu phương trình (\*) có 2 nghiệm riêng  và  thì  cũng là nghiệm của (\*), với  là hằng số.

Và nếu hằng số thì ta gọi  và  là 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính.Khi đó  là nghiệm tổng quát của (\*).

Để giải phương trình (\*) ta tìm nghiệm riêng dưới dạng .

Thay vào phương trình:  ta có



Suy ra 

Và gọi đây là phương trình đặc trưng của phương trình (\*).

a) Nếu  thì phương trình đặc trưng có 2 nghiệm .

Vậy ta có nghiệm tổng quát là: 

b) Nếu  thì phương trình đặc trưng có nghiệm kép

.

Ta có nghiệm riêng .

Dễ dàng chứng minh được  cũng là nghiệm riêng (độc lập tuyến tính với ).

Do đó nghiệm tổng quát là: 

*Giải phương trình truy hồi Fibonacci:*



Phương trình đặc trưng:  có 2 nghiệm phân biệt:



Nghiệm tổng quát là: .

Theo điều kiện của bài toán ta có:  nên



Giải được 

Do đó ta có:



***Tỷ lệ thần thánh.***

Điều lý thú của công thức (20) là dãy số nguyên  lại biểu diễn thành một hàm nguyên của các số vô tỷ.

Điều lý thú khác là sự liên quan giữa và ; người ta định nghĩa số Fi, ký hiệu là  (tên của nhà bác học Fibonacci) như sau:





Đó là một số vô tỷ, tính gần đúng 

**1, 618** được gọi là ***tỷ lệ thần thánh*** với một loạt sự kiện sau đây:

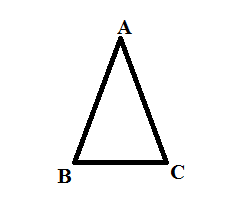
* Trước hết về con người, có ít nhất 3 tỉ lệ liên quan đến số :
  + Tỉ lệ giữa chiều cao của 1 người và khoảng cách từ bàn chân đến rốn
  + Tỉ lệ giữa khoảng cách từ khớp vai đến đầu ngón tay giữa với khoảng cách từ khuỷu tay đến đầu ngón tay giữa
  + Tỉ lệ giữa khoảng cách từ hông đến bàn chân với khoảng cách từ đầu gối đến bàn chân.
* Động vật và thực vật cũng có rất nhiều hiện tượng liên quan đến số 

-Tỉ lệ giữa đường kính vòng ngoài với vòng trong liền kề trên vòng xoáy của một loài ốc, …

-Tỉ lệ giữa đường kính vòng ngoài và vòng trong của hoa hướng dương.

-Sự sắp xếp các lá hoặc các đốt trên một số loài cây.

* Nghệ thuật và kiến trúc cũng có nhiều hiện tượng liên quan đến số , chẳng hạn như kim tự tháp ở Ai Cập, đền Pantheon ở Hy Lạp và ngay cả trụ sở Liên hợp quốc ở NewYork. Nhiều tác phẩm nghệ thuật hội họa nổi tiếng của Leonard de Vinci, của Michelange cũng ẩn chứa những tỉ lệ theo số . Ngôi sao 5 cánh có trên biểu tượng quốc kỳ của rất nhiều nước cũng có tỉ lệ kích thước theo số . Cụ thể là trên một cánh sao của ngôi sao năm cánh như hình dưới đây thì: 



Và còn rất nhiều hiện tượng khác nữa…

Do có nhiều sự kiện ngẫu nhiên liên quan đến số  nên người ta cho rằng số  là thể hiện của sự hợp lý, sự hợp lý này bắt nguồn từ đâu thì không ai biết, do đó nó được gán cho một cái tên: **“*Tỷ lệ thần thánh”.***

## 

## BÀI TẬP CHƯƠNG 2

**2.1.** Biết rằng , nguyên dương.

*Thử tính trực tiếp S1*

Tính1: S1 = 1 + 2 + 3 +...+ (n-1) + n

S1 = n + (n-1) + ,,, + 2 + 1

2S1 = n(n + 1) => **S1 = [n(n+1]/2**

*CM lại bằng qui nạp toán học:*

Bước 1: Thử lại với n = 1: 1 = (1.2)/2 *đúng!*

n = 2: 1 + 2 = (2.3)/2 *đúng*

Bước 2: Công nhận: S1(n) = 1 + 2 + 3 +...+ (n-1) + n = n(n+1)/2 (\*)

CM rằng có: S1(n +1) = 1 + 2 + 3 +...+ (n-1) + n + (n+1) =(n+1)(n+2)/2

Thật vậy, do (\*) nên: S1(n +1) = n(n+1)/2 + (n+1) = (n+1)/2 . [1 + (n+1)]

= n(n+1)(n+2)/2 ***Đúng!***

Áp dụng nhị thức Newton để tính các tổng dưới đây:

|  |  |
| --- | --- |
|  | a)  ***Giải:***  Theo công thức Newton với n = 3 ta có: (1+n)3 = 1 + 3.n +3.n2 + 33 , cho từ 1 đến n:  13 = 1  23 = (1+1)3 = 1 + 3.1 +3.12 + 13  33 = (1+2)3 = 1 + 3.2 +3.22 + 23 …  … -  (1+n)3 = 1 + 3.n +3.n2 + n3.  Cộng vế với vế và khử các số hạng đồng dạng ở 2 bên ta còn:  (1+n)3 = (n+1) + 3.S1 +3.S2 = (n+1) +3n(n+1)/2 +3S2  **S2 = 1/3**[**(n+1)3 – (n+1)**] **= [n(n+1)(2n+1)]/6**  *Tự CM bằng qui nạp toán học* |
|  | b)  ***Giải:*** Tương tự, theo công thức Newton với n = 4:  (1 + n)4 = 1 + 4n + 6n2 +4n3 + n4, cho n từ 1 đến n, ta có được kết quả khá bất ngờ:  **S3 – [n2(n+1)2]/4  = [S1]2**  *Tự CM bằng qui nạp toán học* |
| c) | *Tự làm* |
| d) | ***Giải:*** S5 = 1(1+1) + 2(1+2) + 3(1+3)  … n(1+n)  **= S1 + S2 = [n(n+1)(n+2)]/ 3.**  *Tự CM lại bằng qui nạp toán hoc.* |
| e) |  |
| f) |  |
| g) |  |
| h) |  |
| i) |  |

**2.2.** Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh các công thức sau:

a) 

b) 

c) 

d) với

e) 

**2.3.** Chứng minh các công thức sau đây:

a) , m, n: nguyên dương.

b)  (n nguyên dương)

c) ; (r, n, k nguyên)

d) , 

e) ;

, .

f) Cho m và n là các số nguyên dương. Tìm giá trị của biểu thức



**2.4.** Tìm số nguyên dương n sao cho:

****

**2.5.** Trong công thức khai triển của nhị thức Newton

có một số thỏa mãn điều kiện: . Tìm n.

**2.6.** Cho Tìm 

**2.7.** Gọi là hệ số của trong khai triển thành đa thức của

(n nguyên dương)

Tìm n để cho .

**2.8.** Tìm n nguyên dương thỏa mãn điều kiện:

****

**2.9.** Tìm số nguyên dương n sao cho:

****

**2.10.** Tìm giá trị của biểu thức:****

biết rằng ****

**2.11.** Tìm hệ số của trong khai triển thành đa thức của  biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện:

****

**2.12.** Biết rằng 

và

Tìm n và 

**2.13.** Tìm hệ số của trong khai triển của  biết rằng:

****

**2.14.** Trong khai triển của nhị thức **;** tìm hệ số của số hạng chứa a và b có số mũ bằng nhau.

**2.15.** Tìm hệ số của trong khai triển của 

**2.16.** Tìm số hạng không chứa x trong khai triển:

a) b) 

**2.17.** Tìm các số m và n nguyên dương sao cho



**2.18.** Cho . Tìm số các tập con của A chứa ít nhất 2 phần tử là 2 số liên tiếp nhau.

**2.19.** Chứng minh rằng:

a) 

b) 

**2.20.** Giải các phương trình

a) , ( n nguyên và 

b) , ( n nguyên và 

**2.21.** Giải bất phương trình:



**2.22.** Tìm giá trị của biểu thức  biết rằng 

**2.23** Có bao nhiêu con số hàng nghìn trong các trường hợp sau đây?

a) Các chữ số không lặp.

b) Các chữ số có thể lặp.

c) Các chữ số có lặp.

d) Các chữ số có lặp nhưng không quá 2 lần.

**2.24.** Có bao nhiêu con số hàng nghìn trong các trường hợp sau đây:

a) Các chữ số tạo thành một dãy tăng.

b) Các chữ số tạo thành một dãy giảm.

**2.25.** Trong một tòa nhà có 11 tầng, mỗi tầng có 10 buồng.

a) Có bao nhiêu cách chọn 4 buồng cùng 1 tầng và liền nhau?

b) Có bao nhiêu cách chọn mỗi tầng 4 buồng liền nhau?

c) Có bao nhiêu cách chọn 4 tầng liền kề nhau, mỗi tầng 4 buồng liền nhau?

**2.26.** Một phiếu trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời.

a) Có bao nhiêu cách điền phiếu, nếu mỗi câu hỏi đều được trả lời?

b) Có bao nhiêu cách điền vào phiếu, nếu có thể có câu hỏi bỏ trống không trả lời?

**2.27.** Có bao nhiêu dãy nhị phân có độ dài 10 trong các trường hợp sau:

a) Không có điều kiện ràng buộc gì.

b) Có đúng 5 số 1

c) Có 2 bít đầu là số 1, 2 bít cuối là số 0.

**2.28.** Có bao nhiêu biển đăng ký xe nếu mỗi biển gồm 2 chữ cái (có thể lặp trong 26 chữ cái) và tiếp theo là 4 chữ số (có thể lặp)?

**2.29.** Cho  là n số nguyên tố khác nhau và 

Trong đó  là các số nguyên dương .Tìm số ước số của T.

**2.30.** Trong một đám cưới có 10 người kể cả cô dâu và chú rể.

a) Có bao nhiêu kiểu ảnh cô dâu và chú rể chụp chung với 6 khách trong đó cô dâu và chú rể đứng gần nhau?

b) Có bao nhiêu kiểu ảnh chụp chung cả 10 người trong đó cô dâu và chú rể không đứng gần nhau?

**2.31.** Cho là một đơn ánh. X là 1 tập có 5 phần tử. Hỏi có bao nhiêu đơn ánh khác nhau trong các trường hợp sau đây:

a) Y có 4 phần tử.

b) Y có 5 phần tử.

c) Y có 6 phần tử.

**2.32.** Có 5 nam và 5 nữ đứng dàn thành một hàng ngang.

a) Có bao nhiêu cách nam nữ đứng xen nhau?

b) Có bao nhiêu cách 5 nữ đứng liền nhau?

c) Có bao nhiêu cách nữ đứng liền nhau và nam cũng đứng liền nhau?

**2.33.** Cho A là tập có 10 phần tử .

a) Có bao nhiêu tập con của A có số phần tử là lẻ? Là chẵn?

b) Có bao nhiêu tập con của A có số phần tử ít hơn 4?

c) Có bao nhiêu tập con của A có số phần tử nhiều hơn 6?

**2.34.** Nhóm A có 6 sinh viên, nhóm B có 7 sinh viên và nhóm C có 8 sinh viên.

a) Có bao nhiêu cách chọn ra 5 sinh viên thuộc 2 nhóm: A và B; B và C; C và A?

b) Có bao nhiêu cách chọn ra 5 sinh viên thuộc cả 3 nhóm?

c) Có bao nhiêu cách chọn ra 7 sinh viên thuộc cả 3 nhóm?

**2.35.** Có bao nhiêu cách chọn ra 36 tờ giấy bạc thuộc 3 mệnh giá khác nhau: 1 nghìn đồng, 5 nghìn đồng và 10 nghìn đồng để có được một số tiền đúng bằng 100 nghìn đồng.

**2.36.** Có bao nhiêu con số gồm 3 chữ số thỏa mãn các điều kiện sau đây:

a) Chia hết cho 2 hoặc 3 hoặc 5.

b) Chia hết cho 2 hoặc 3 hoặc hoặc 7.

**2.37.** Qua một cuộc điều tra tại một khu phố người ta thấy 90% gia đình có ti vi; 80% gia đình có điện thoại; 75% gia đình có cả ti vi và điện thoại. Hỏi tỉ lệ gia đình không có cả ti vi và điện thoại là bao nhiêu?

**2.38.** Xếp chỗ cho 5 cặp vợ chồng vào 10 chiếc ghế quanh một bàn tròn.

a) Có bao nhiêu cách xếp mỗi cặp vợ chồng đều ngồi gần nhau?

b) Có bao nhiêu cách xếp nam nữ xen kẽ nhau?

c) Có bao nhiêu cách xếp nam nữ xen nhau nhưng không có cặp vợ chồng nào ngồi gần nhau?

**2.39.** Trong một lớp học có 35 sinh viên giỏi toán, 30 sinh viên giỏi tin học và 25 sinh viên giỏi tiếng Anh, 12 sinh viên giỏi toán và tin học, 10 sinh viên giỏi tin học và tiếng Anh, 8 sinh viên giỏi cả toán và tiếng Anh, 5 sinh viên giỏi cả toán, tin và tiếng Anh. Hỏi lớp học có bao nhiêu sinh viên biết rằng mỗi sinh viên đều giỏi ít nhất 1 môn học?

**2.40.** Có bao nhiêu cách chia 1 bộ bài tú lơ khơ 52 quân trong các trường hợp sau đây:

a) Chia thành 4 phần bằng nhau (mỗi phần 13 quân).

b) Chia thành 4 phần với số quân tương ứng: 10 quân, 12 quân, 14 quân và 16 quân.

c) Chia cho 4 người, mỗi người có số quân bằng nhau.

d) Chia cho 4 người với số quân tương ứng: 10 quân, 12 quân, 14 quân, 16 quân.

**2.41.** Một lớp học có 40 học sinh.

a) Có bao nhiêu cách chia thành 2 nhóm, mỗi nhóm có 20 học sinh?

b) Có bao nhiêu cách xếp thành 2 hàng dọc, mỗi hàng có 20 học sinh?

c) Có bao nhiêu cách chia thành 4 nhóm, mỗi nhóm có 10 học sinh?

d) Có bao nhiêu cách xếp thành 4 hàng dọc, mỗi hàng có 10 học sinh?

**2.42.** Có bao nhiêu hoán vị khác nhau khi ta thay đổi vị trí các chữ cái trong các từ dưới đây:

a) MISSISSIPI ; b) NHANH

**2.43.** Có bao nhiêu cách chia 10 chiếc kẹo cho 5 em bé trong các trường hợp sau:

a) Chia một cách tùy ý.

b) Em nào cũng được chia kẹo.

c) Có một em có số kẹo ít hơn 4.

**2.44.** Phương trình  có bao nhiêu nghiệm trong các trường hợp sau:

a)  và nguyên .

b)  và nguyên .

c) 